A1 ضمیمہ A1: ریاضی میں ثبوت
(PROOFS IN MATHEMATICS)

A1.1 تعارف (INTRODUCTION)

ہماری روزمرہ زندگی میں صاف ستھری سوچ اور استدلال کی صلاحیت کافی مفید ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک سیاست داں آپ کو بتاتا ہے اگر آپ کو ایک ایماندار، صاف ستھری حکومت چاہیے تو ہمیں ووٹ دیجئے۔ اصل میں وہ آپ کو اس بات کا یقین دلانا چاہتا ہے کہ اگر آپ نے اس کو ووٹ نہیں دیا تو آپ ایک صاف ستھری حکومت سے محروم ہو جائیں گے۔ اسی طرح سے ایک اشتہار میں یہ بتایا جاتا ہے کہ عقلمند آدمی XYZ قسم کے جوتے پہنتے ہیں۔ اگر آپ XYZ قسم کے جوتے پہنتے ہیں تو آپ عقلمند نہیں ہیں۔ آپ خود مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ اوپر دئے گئے دونوں بیانات عام پبلک کو گمراہ کرنے کے لئے ہوتے ہیں۔ اس لئے اگر اہم استدلال کے عمل کو صحیح طور پر سمجھتے ہیں تو ہم انجانے میں بھی ان کے جال میں نہیں پھنسیں گے۔

استدلال کا صحیح استعمال ریاضی اور خصوصاً ثبوت کی تشکیل کا مغز ہے، آپ نویں کلاس میں ثبوت کے تصور سے متعارف ہو چکے ہیں اور آپ نے اصل میں بہت سے بیانات، خاص طور سے جیومیٹری، کو ثابت بھی کئے ہیں، یاد کیجئے کہ ثبوت بہت سے ریاضیاتی بیانوں سے مل کر بنے ہوتے ہیں۔ جس میں ہر ایک بیان ثبوت میں موجود بیان یا پہلے سے ثابت کئے گئے مسئلہ یا بدیہی یا مفروضہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی ثبوت کی تشکیل کا خاص اور استخراجی استدلال کا عمل اس باب کی شروعات ہم ریاضاتی بیان پر نظر ثانی کرتے ہیں اور پھر ہم بہت سی مثالوں کا استعمال کر کے استخراجی استدلال میں اپنے ہنر skill کو مزید تیز کریں گے۔ ہم نفی (negation) کے تصور پر بھی غور کریں گے اور دئے ہوئے بیان کا منفی بیان بھی معلوم کریں گے۔ اور پھر ہم

اس بات پر بحث کریں گے کہ کس بیان کا معکوس معلوم کرنے سے کیا مراد ہے اور آخر میں ہم نویں کلاس میں سیکھے گئے ثبوت کے اہم اجزاء پر بہت سے مسئلوں کا تجزیہ کر کے نظر ثانی کریں گے۔ یہاں ہم تضاد کے ذریعے ثابت کرنے کے تصور پر بھی بحث کریں گے۔ جس سے آپ کا سابقہ نویں کلاس میں اور اس کتاب کے بہت سے ابواب میں پڑھ چکے ہیں۔

A1.2 ریاضیاتی بیانات پر نظری ثانی

یاد کیجیے کہ بیان ایک با معنی جملہ ہے جو ایک حکم یا ایک استعجاب یا استفہام نہیں ہے مثال کے طور پر کرکٹ ورلڈ کپ کے فائنل میں کون سی ٹیمیں کھیل رہی ہیں؟ ایک سوال ہے ایک بیان نہیں ہے۔ جاؤ اور اپنے گھر کا کام ختم کرو، ایک حکم ہے بیان نہیں ہے۔ کتنا خوبصورت گول ہوا ہے، استعجابیہ جملہ ہے بیان نہیں ہے۔

یاد کیجئے کہ عمومی طور پر بیانات مندرجہ ذیل میں سے ایک ہو سکتے ہیں۔

- ہمیشہ صحیح
- ہمیشہ غلط
- مبہم

نویں کلاس میں آپ یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ ریاضی میں ایک بیان قابل قبول تب ہی ہوتا ہے اگر یا تو یہ ہمیشہ صحیح ہو یا ہمیشہ غلط ہو۔ اس لئے مبہم بیانات کبھی بھی ریاضیاتی بیانات نہیں ہوتے۔

آیئے کچھ مثالوں سے اپنی سمجھ پر نظر ثانی کرتے ہیں۔

مثال 1: بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات ہمیشہ صحیح ہیں۔ ہمیشہ غلط ہیں یا مبہم ہیں اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) سورج زمین کے گرد گھومتا ہے۔

(ii) گاڑیوں میں چار پہیے ہوتے ہیں۔

(iii) روشنی کی رفتار تقریباً 3×10^5 کلو میٹر فی سیکنڈ ہوتی ہے۔

(iv) کلکتہ جانے والی ایک سڑک نومبر سے مارچ تک بند کر دی جاتی ہے۔

(v) تمام انسان فانی ہیں۔

حل:

(i) یہ بیان ہمیشہ غلط ہے کیونکہ ماہر فلکیات نے یہ ثابت کردیا ہے زمین سورج کے گرد گھومتی ہے۔

(ii) یہ بیان مبہم ہے کیونکہ ہم یہ طے نہیں کر سکتے کہ یہ ہمیشہ صحیح ہوگا یا ہمیشہ غلط۔ اس کا انحصار اس بات پر ہے گاڑی کون سی ہے کیونکہ گاڑیوں کے 2,3,4,6,10 وغیرہ پہیے ہوسکتے ہیں۔

(iii) یہ بیان ہمیشہ صحیح ہے جس کی تصدیق طبیعیات سے ہو چکی ہے۔

(iv) یہ بیان مبہم ہے کیونکہ یہ واضح نہیں کیا گیا ہے یہاں پر کون سی سڑک مراد ہے۔

(v) یہ بیان بالکل صحیح ہے کیونکہ انسان کو کبھی نہ کبھی مرنا ہے۔

مثال 2: بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط، ایسے جوابات کا جواز بھی پیش کیجئے۔

(i) تمام مساوی ضلعی مثلث مساوی الساقین ہوتے ہیں۔

(ii) کچھ مساوی الساقین مثلث مساوی ضلعی ہوتے ہیں۔

(iii) تمام مساوی الساقین مثلث مساوی ضلعی ہوتے ہیں۔

(iv) کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد بھی ہوتے ہیں۔

(v) کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد نہیں ہوتے ہیں۔

(vi) تمام صحیح اعداد ناطق اعداد نہیں ہوتے۔

(vii) دو ناطق اعداد کے درمیان کوئی ناطق عدد نہیں ہوتا۔

حل:

(i) یہ بیان درست ہے کیونکہ مساوی ضلعی کے تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں اس لئے یہ مساوی الساقین ہوتا ہے۔

(ii) یہ بیان درست ہے کیونکہ ایسے مساوی الساقین مثلث جن کے قاعدہ کے زاویہ 60° کے ہوتے ہیں۔ مساوی ضلعی مثلث ہوتے ہیں۔

(iii) یہ بیان غلط ہے اس کی ایک برعکس مثال دیجئے۔

(iv) یہ بیان درست ہے کیونکہ ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ کی شکل کے ہوتے ہیں جہاں p ایک صحیح عدد اور جہاں $q = 1$ ہو وہ صحیح

اعداد ہیں (مثال کے طور پر $3 = \frac{3}{1}$)

(v) یہ بیان درست ہے کیونکہ $\frac{p}{q}$ کی شکل والے ایسے ناطق اعداد جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور q, p کو تقسیم نہیں کرتا، صحیح اعداد نہیں ہیں۔

(vi) یہ بیان ایسا ہے جیسے ہم کہیں، ایک ایسا صحیح عدد ہے جو ناطق عدد نہیں ہے۔ یہ غلط ہے کیونکہ تمام صحیح اعداد ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

(vii) یہ بیان غلط ہے کیونکہ آپ جانتے ہیں کہ کن ہی دو ناطق اعداد r اور s کے درمیان ناطق عدد $\frac{r+s}{2}$ ان کے درمیان میں ہوتا ہے۔

مثال 3: اگر $x < 4$، تو بتائیے کہ مندرجہ ذیل کون سا بیان درست ہے؟ اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

حل:

(i) یہ بیان غلط ہے، کیونکہ مثال کے طور پر $x = 3 < 4$، $2x > 8$ کو مطمئن نہیں کرتا۔

(ii) یہ بیان غلط ہے، کیونکہ مثال کے طور پر $x = 3.5 < 4$، $2x < 6$ کو مطمئن نہیں کرتا۔

(iii) یہ بیان صحیح ہے، یہ ایسا ہی جیسا $x < 4$

مثال 4: مندرجہ ذیل بیانوں کو مناسب شرطوں کے ساتھ اس طرح دوبارہ بیان کیجیے کہ یہ درست بیانات ہو جائیں۔

(i) اگر کسی چار ضلعی کے وتر مساوی ہوں تو یہ مستطیل ہوتا ہے۔

(ii) مثلث کے دو ضلعوں کے دو نقطوں کو ملانے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

(iii) تمام مثبت صحیح اعداد p کے لئے $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے۔

(iv) تمام دو درجی مساواتوں کے دو حقیقی جذر ہیں۔

حل:

(i) اگر متوازی الاضلاع کے وتر برابر ہوں تو وہ مستطیل ہے۔

(ii) مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

(iii) تمام مفرد اعداد p کے لئے $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے۔

(iv) تمام دو درجی مساواتوں کے زیادہ سے زیادہ دو حقیقی جزر ہوتے ہیں۔

ریمارک: مذکورہ بالا بیانوں کو دوبارہ بیان کرنے کا دوسرا طریقہ بھی ہے مثال کے طور پر (iii) کو ہم اس طرح بھی بیان کر سکتے ہیں $\sqrt{p}$ تمام مثبت صحیح اعداد p کے لئے غیر ناطق ہے جو پورا ایک مربع نہیں ہے۔

مشق A1.1

1۔ بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات ہمیشہ صحیح ہیں، ہمیشہ غلط ہیں یا مبہم ہیں، اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) ریاضی کی تمام نصابی کتابیں دلچسپ ہیں۔

(ii) زمین سے سورج تک کا فاصلہ تقریباً 1.5×10^8 کلومیٹر ہے۔

(iii) تمام انسان بوڑھے ہوتے ہیں۔

(iv) اتّر کاشی سے حارسل کا سفر تھکا دینے والا ہے۔

(v) عورت نے دوربین کے ذریعے ہاتھی دیکھا۔

2۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط، اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) تمام مسدس (چھ ضلعی) کثیر ضلعی ہوتے ہیں۔

(ii) کچھ کثیر ضلعی پانچ ضلعی ہوتے ہیں۔

(iii) تمام جفت اعداد 2 سے تقسیم نہیں ہوتے۔

(iv) کچھ حقیقی اعداد غیر ناطق ہوتے ہیں۔

(v) تمام حقیقی اعداد ناطق نہیں ہوتے۔

3۔ مان لیجئے a اور b حقیقی اعداد ہیں جب کہ $ab \neq 0$ تب مندرجہ ذیل میں کون سے بیانات صحیح ہیں؟ اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) a اور b دونوں صفر ہیں

(ii) a اور b دونوں غیر صفر ہیں

(iii) a یا b میں سے ایک صفر نہیں ہے۔

4۔ مناسب شرطیں لگا کر مندرجہ بیانات کو اس طرح دوبارہ لکھیں کہ یہ درست ہو جائیں۔

(i) اگر $a^2 > b^2$ تب $a > b$ (ii) $x^2 = y^2$ تب $x = y$

(iii) اگر $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ تب $x = 0$ (vi) ایک چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

A1.3 استخراجی استدلال

نویں کلاس میں آپ استخراجی استدلال کے تصوّر سے متعارف ہو چکے ہیں، یہاں ہم ایسی بہت سی مثالوں کو حل کریں گے۔ جو یہ واضح کر دیں گی کہ کس طرح سے استخراجی استدلال، دئے ہوئے بیانوں، جن کو ہم صحیح سمجھتے ہیں، سے نتائج اخذ کرتا ہے دئے ہوئے بیانات مفروضہ کہلاتے ہیں، ہم کچھ مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 5: دیا ہوا ہے کہ بیجاپور، کرناٹک صوبہ میں واقع ہے۔ شبانہ بیجاپور میں رہتی ہے۔ شبانہ کس صوبہ میں رہتی ہے۔

حل: یہاں دو مفروضے ہیں:

(i) بیجاپور کرناٹک صوبہ میں ہے۔

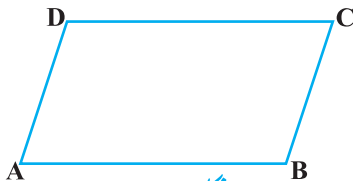
(ii) شبانہ بیجاپور میں رہتی ہے۔

اس مفروضہ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ شبانہ کرناٹک صوبہ میں رہتی ہے۔

مثال 6: دیا ہوا ہے کہ تمام ریاضی کی نصابی کتابیں دلچسپ ہیں اور فرض کیجئے آپ ریاضی کی نصابی کتاب پڑھ رہے ہیں۔ تو پڑھی جانے والی نصابی کتاب سے کیا نتیجہ نکالتے ہیں۔

حل: دو مفروضوں کو استعمال کرنے پر ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ آپ ایک دلچسپ کتاب پڑھ رہے ہیں۔

مثال 7: دیا ہوا ہے کہ، $y = -6x + 5$ اور فرض کیجئے کہ $x = 3$، y کیا ہے۔

حل: دو مفروضہ دئے ہوئے ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے $y = -6(3) + 5 = -13$

مثال 8: دیا ہوا ہے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، اور فرض کیجیے کہ AD = 5 سینٹی میٹر، AB = 7 سینٹی میٹر (شکل A1.1 دیکھئے) آپ DC اور AB کی لمبائیوں کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

D C A B

شکل A1.1

حل: ہمیں دیا ہوا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔اس لئے ہم تمام خصوصیات کو اخذ کرتے ہیں جو متوازی الاضلاع کے لئے درست ہیں۔اس لئے خصوصی طور پر یہ خصوصیت کہ متوازی الاضلاع کے مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں صحیح ہے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ سینٹی میٹر AD=5 ہم اخذ کرتے ہیں کہ سینٹی میٹر BC = 5 اسی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ سینٹی میٹر BC=7

ریمارک: اس مثال میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اکثر ایک مفروضہ میں مخفی خصوصیت کو معلوم کرنے اور استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال 9: دیا ہوا ہے کہ $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے تمام p کے لئے۔اور فرض کیجئے کہ 19423 ایک مفرد عدد ہے آپ $\sqrt{19423}$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

حل: ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sqrt{19423}$ غیر ناطق ہے۔

مذکورہ بالا مثالوں میں آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ ہم یہ جانتے ہیں کہ مفروضہ صحیح ہے یا غلط۔ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ یہ صحیح ہیں اور پھر استخراجی استدلال کا استعمال کرتے ہیں مثال کے طور پر مثال 9 میں ہم نے یہ جانچ نہیں کی کہ 19423 مفرد ہے یا نہیں اپنی اس دلیل کی وجہ سے ہم اسے مفرد مانتے ہیں۔اس سیکشن میں ہم جس بات پر زور دینا چاہتے ہیں وہ یہ ہے کہ دئے ہوئے ایک مخصوص بیان سے کوئی نتیجہ اخذ کرنے کے لئے ہم کس طرح استخراجی استدلال کا استعمال کرتے ہیں۔یہاں جس بات کی سب سے زیادہ اہمیت ہے وہ یہ ہے کہ ہم استدلال کا صحیح عمل استعمال کریں۔اور استدلال کا یہ عمل مفروضہ کے غلط یا صحیح ہونے پر منحصر نہ ہو۔جب کہ یہ بات نوٹ کرنا ضروری ہے کہ اگر آپ ایک غلط مفروضہ سے شروع کرتے ہیں تو آپ ایک غلط نتیجہ پر ہی پہونچیں گے۔

مشق A1.2

1۔ دیا ہوا کہ تمام خواتین فانی ہیں اور فرض کیجئے کہ A ایک عورت ہے تو ہم A کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

2۔ دیا ہوا کے دو ناطق اعداد کا حاصل ضرب ناطق ہے اور فرض کیجئے کہ a اور b ناطق ہیں تو ab کے بارے میں آپ کیا نتیجہ نکالتے ہیں۔

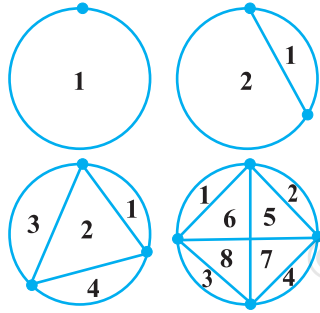
3۔ دیا ہوا ہے کہ غیر ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے اور $\sqrt{17}$ غیر ناطق ہے، تو ہم $\sqrt{17}$ کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں کیا نتیجہ نکالتے ہیں۔

4۔ دیا ہوا ہے کہ $y = x^2 + 6$ اور $x = -1$، y کی قدر کے بارے میں آپ کیا نتیجہ نکالتے ہیں۔

5۔ ABCD ایک متوازی الاضلاع دیا ہوا ہے اور $\angle B = 80^\circ$، متوازی الاضلاع کے باقی زاویوں کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

6۔ دیا ہوا ہے کہ PQRS ایک دائری چار ضلعی ہے اور اس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو اب چار ضلعی کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

7۔ تمام مفرد اعداد p کے لئے $\sqrt{p}$ غیر ناطق دیا ہوا ہے۔ فرض کیجیے 3721 مفرد عدد ہے کیا آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\sqrt{3721}$ غیر ناطق عدد ہے۔ کیا آپ کا نتیجہ صحیح ہے؟ کیوں؟ اور کیوں نہیں

A1.4 قیاس، مسئلے، ثبوت اور ریاضیاتی استدلال

شکل A1.2

شکل A1.2 پر غور کیجیے پہلے دائرہ پر ایک نقطہ ہے، دوسرے پر 2 نقطے، اور تیسرے پر تین نقطے، اور اسی طرح آگے بھی، ہر حالت میں ان نقطوں کو ملانے والے ممکنہ خطوط کھینچیے۔

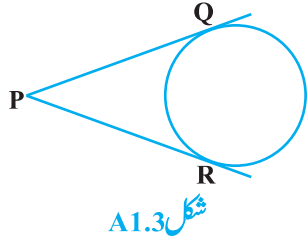
خطوط دائرہ کو دو یا باہمی اخراجی خطوں (جن میں کوئی مشترک حصہ نہ ہو) میں تقسیم کرتے ہیں، ہم ان کو گنتے ہیں اور ہم ان کو جدول کی شکل میں لکھتے ہیں جیسے دکھایا گیا ہے:

خطوں کی تعداد	نقطوں کی تعداد
1	1
2	2
4	3
8	4
	5
	6
	7

آپ ان میں سے کچھ ایک ایسا فارمولہ معلوم کر سکتے ہیں جو دی ہوئی نقطوں کی تعداد کے لئے خطوں کی تعداد کی پیشین گوئی کر سکے۔ نویں کلاس میں آپ کو یہ یاد ہوگا یہ دانشمندانہ اندازہ قیاس کہلاتا ہے۔

مان لیجیے آپ کا قیاس یہ ہے کہ دائرے کے اوپر دئے گئے 'n' نقطوں کے لئے 2^{n-1} باہمی اخراجی نقطے ہوں گے جو ان نقطوں کو تمام ممکنہ خطوط سے ملانے پر بنیں گے۔ یہ ایک بہت ہی دانشمندانہ اندازہ نظر آتا ہے اور اس کی جانچ کی جاسکتی ہے اگر $n = 5$، تو ہمیں 16 خطہ حاصل ہوں گے، اس طرح سے اس فارمولہ کی تصدیق 5 نقطوں سے کرنے کے بعد کیا آپ اسے مطمئن ہیں کے کوئی سے n نقطوں کے لئے 2^{n-1} خطہ ہوں گے؟ اگر ایسا ہے تو اس کا جواب کیا ہوگا۔ اگر کوئی آپ سے پوچھتا ہے کہ آپ $n = 25$ کے لئے اتنے مطمئن کیوں ہو سکتے ہیں؟ ایسے سوالوں کا جواب دینے کے لئے آپ کو ایک ثبوت کی ضرورت ہوئی جو بغیر کسی شبہ کے یہ دکھاتا ہے کہ یہ نتیجہ کچھ n کے لئے درست نہیں ہے۔ حقیقت میں اگر آپ صابر ہیں اور اس کو آپ $n = 6$ کے لئے دیکھیں تو آپ پائیں گے ایسے 31 خطہ ہیں اور $n = 7$ کے 57 خطہ ہیں اسلئے $n = 6$ دئے گئے قیاس کی برعکس مثال ہے۔ اس کے برعکس مثال کی قوت کا مظاہرہ ہوتا ہے یاد کیجئے آپ نے نویں کلاس میں سیکھا تھا کہ ایک بیان کو ردّ کرنے کے لئے، صرف ایک برعکس مثال پیش کرنا ہی کافی ہے۔

آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ ہم نے خطوں کی تعداد کے سلسلہ میں ثبوت پر زور دیا حالانکہ ہم نے $n = 1,2,3,4,$ اور 5 کے لئے اس کی تصدیق کر لی تھی۔ آیئے کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ آپ مندرجہ ذیل نتائج سے واقف ہیں (جو باب 5 میں دیے گئے ہیں):

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ اس کی سچائی کو قائم کرنے کے لئے یہ کافی نہیں ہے کہ ہم $n = 1, 2, 3$ کے لئے اس کی تصدیق کریں، کیونکہ کوئی ایسی n کی قدر ہو سکتی ہے جس کے لئے یہ نتیجہ ٹھیک نہ ہو، (جیسا کہ اوپر کی ایک مثال میں نتیجہ $n=6$ کے لئے فیل ہو گیا تھا) لہذا ہمیں ایک ایسے ثبوت کی ضرورت ہے جو سچائی کو بلا شبہ قائم کر سکتا ہے اس کا ثبوت آپ اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔

Q
P
R
شکل A1.3

اب شکل A1.3 پر غور کیجئے جہاں PQ اور PR، نقطہ P سے دائرہ پر بنائے گئے مماس ہیں آپ ثابت کر چکے ہیں کہ $PQ = PR$ (مسلہ 10.2) آپ اس سے مطمئن نہیں ہوئے کہ آپ نے بہت سی ایسی شکلیں بنائیں اور ان کے مماسوں کی پیمائش کی اور اس بات کی تصدیق خود کی، کہ نتیجہ ہر ایک حالت میں صحیح ہوا۔

کیا آپ کو یاد ہے کہ ثبوت میں کیا کیا ہوتا ہے؟ اس میں بیانات کا تواتر ہوتا ہے (جو صحیح دلائل کہلاتے ہیں) جو ثبوت میں پہلے کے بیانوں سے یا پہلے سے ثابت کئے گئے (یا معلوم) نتیجہ جو ثابت کئے جانے والے نتیجہ سے مبّرا یا موضوعوں سے یا تعریفوں سے یا آپ کے بنائے گئے مفروضوں سے سامنے آئے اور آپ نے بیان PQ = PR سے ثبوت اخذ کیا۔ یعنی بیان جو آپ ثابت کرنا چاہتے تھے اب ہم کچھ مثالوں اور مسئلوں پر غور کریں گے اور ان کے ثبوتوں کا تجزیہ کریں گے جس سے ہم اس بات کو بہتر طور پر سمجھ سکیں گے کہ ان کی تشکیل کیسے ہوتی ہے۔

ہم شروعات ثبوت کے نام نہاد راست یا استخراجی طریقوں کو استعمال کر کے کریں گے اس طریقہ میں ہم بہت سے بیانات بناتے ہیں۔ جن کی بنیاد پچھلے بیانوں پر ہوتی ہے۔ اگر ہر ایک بیان منطقی طور پر صحیح ہو تو منطقی طور پر صحیح نتیجہ برآمد ہوگا۔

مثال 10: دو ناطق اعداد کا حاصل جمع ناطق عدد ہے۔

حل:

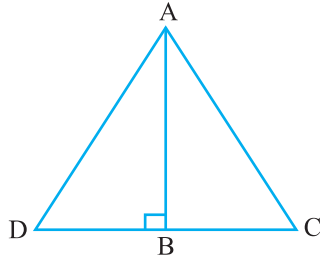
نمبر شمار	بیانات	تجزیہ
1	مان لیجیے x اور y ناطق اعداد ہیں	کیونکہ نتیجہ ناطق اعداد کے بارے میں ہے اس لئے ہم شروعات x اور y سے کرتے ہیں جو ناطق ہیں
2	مان لیجیے $x = \frac{m}{n}$، $n \neq 0$ اور $q \neq 0$ $y = \frac{p}{q}$ جہاں m, n, p اور q صحیح اعداد ہیں	ناطق اعداد کی تعریف استعمال کیجیے۔
3	اس لئے $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	یہ نتیجہ ناطق اعداد کے حاصل جمع کی بات کرتا ہے اس لئے ہم $(x + y)$ پر غور کرتے ہیں
4	صحیح اعداد کی خصوصیات کو استعمال کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ $mq + np$ اور nq صحیح اعداد ہیں۔	صحیح الاعداد کی معلوم خصوصیات کو استعمال کرنے پر
5	کیونکہ n $\neq$ 0 اور $q \neq 0$ اس سے ملتا ہے ہے $nq \neq 0$	صحیح الاعداد کی معلوم خصوصیات کو استعمال کرنے پر
6	اس لئے $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ ناطق عدد ہے	ناطق عدد کی تعریف استعمال کرنے پر

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ اوپر دیئے گئے ثبوت کا ہر بیان پہلے سے قائم شدہ سچائی یا تعریف پر منحصر ہے۔

مثال 11: 3 سے بڑا ہر مفرد عدد $6k+1$ یا $6k+5$ کی شکل کا ہے جہاں k صحیح عدد ہے

حل:

نمبر شمار	بیانات	تجزیہ (Comments)
1	مان لیجیے p، 3 سے بڑا مفرد عدد ہے	کیونکہ نتیجہ کا تعلق 3 سے بڑا مفرد سے ہے اس لئے ہم ایسے عدد سے شروع کرتے ہیں
2	p کو 6 سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں کہ $6k$ +، $6k+1$، $6k+2$، $6k+3$، $6k+4$ یا $6k+5$ کی شکل کا ہے جہاں k صحیح عدد ہے۔	اقلیدس کا تقسیم معاونہ کے استعمال کرنے پر
3	p کو 6 سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں کہ $6k+2$، $6k+1$، $6k+3$، $6k+4$ یا $6k+5$ کی شکل کا ہے جہاں k صحیح عدد ہے۔	اب ہم باقی کا تجزیہ کرتے ہیں جس سے ہمیں ملتا ہے کہ p مفرد ہے۔
4	لیکن $6k=2(3k)$, $6k+2=2(3k+1)$ $6k+4=2(3k+2)$ اور $6k+3=3(2k+1)$ اس لئے یہ مفرد نہیں ہیں	ہم باقی جوابوں کے اخراج سے اس نتیجہ پر پہونچے ہیں

ریمارک: اوپر دی گئی مثال میں ہم مختلف جوابات کے اخراج سے نتیجہ تک پہونچے ہیں اس طریقہ کو کبھی کبھی ہم اخراج کا ثبوت بھی کہتے ہیں۔

مسلہ A1.1 فیثاغورث کے مسلہ کا معکوس

اگر ایک مثلث میں ایک ضلع کے مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے تو پہلے ضلع کے سامنے کا زاویہ قائمہ ہے۔

شکل A1.4

ثبوت:

نمبرشمار	بیانات	تجزیہ
1	مان لیجیے ABC Δ مفروضہ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ کو مطمئن کرتا ہے	کیونکہ ہم اسے مثلث کے لئے بیان کو ثابت کر رہے ہیں اس لئے ایسے مثلث کو لے کر شروعات کرتے ہیں
2	AB کا عمودی خط BD بنائیے جب کہ BC = BD اور A کو D سے ملائیے	یہ وجدانی قدم جس کے بارے میں ہم نے بات کی تھی کہ یہ مسئلوں کو ثابت کرنے کے لئے اٹھایا جاتا ہے۔
3	شکلوں کے مطابق ABDΔ ایک قائم مثلث ہے اور فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے ہمارے پاس ہے $AD^2 = AB^2 + BD$	ہم نے فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کیا ہے جو پہلے ہی ثابت کیا جا چکا ہے
4	تشکیل سے BC = BD اس لئے ہمارے پاس ہے $AD^2 = AB^2 + BC^2$	منطقی اخراج
5	اس لئے $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	مفروضہ اور پچھلے بیانوں کا استعمال کرتے ہیں
6	کیونکہ AC اور AD مثبت ہیں ہمارے پاس ہے AC = AD	اعداد کی پہلے سے معلوم خصوصیات کے استعمال کرنے پر
7	ہم نے ابھی دکھایا ہے AC = AD اور BC = BD تشکیل ہے اور AB مشترک ہے اس لئے SSS سے $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	پہلے سے معلوم مسئلہ کے استعمال سے
8	کیونکہ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $\angle ABC =$ $\angle ABD$ جو کے ایک قائم زاویہ ہے	منطقی استخراج، جس کی بنیاد پہلے سے ہی قائم حقیقت

ریمارک: اوپر دیا گیا ہر نتیجہ ان اقدام کے تواتر سے ثابت کیا گیا ہے جو تمام ایک دوسرے سے منسلک ہیں ان کی ترتیب اہم ہے ثبوت کا ہر قدم پچھلے اقدام اور پہلے سے معلوم نتائج کو لاگو کرتا ہے (مسئلہ 6.9 دیکھیے)

مشق A1.3

مندرجہ ذیل ہر ایک سوال میں، ہم آپ سے ایک بیان کو ثابت کرنے کے لیے کہتے ہیں، ہر ثبوت میں ملوث اقدام کی فہرست بنائیے اور ہر قدم کی وجہ بھی بتائیے۔

1۔ ثابت کیجیے کہ دو لگا تار طاق اعداد کا حاصل جمع 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔

2۔ دو لگا تار طاق اعداد لیجیے، ان کے مربعوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے اور پھر نتیجہ میں 6 جوڑ دیجیے ثابت کیجیے کہ نیا عدد ہمیشہ 8 سے تقسیم ہوگا۔

3۔ اگر $p \geq 5$ ایک مفرد عدد ہے، دکھائیے کہ $p^2 + 2$ 3 سے تقسیم ہو جائیگا۔

4۔ مان لیجیے x اور y ناطق اعداد ہیں دکھائیے کہ xy ناطق عدد ہے۔

5۔ اگر a اور b مثبت صحیح اعداد ہیں تب آپ جانتے ہیں کہ $a = bq + r$، $0 \leq r < b$ جہاں q ایک مکمل عدد ہے ثابت کیجیے کہ $\text{HCF}(a, b) = \text{HCF}(b, r)$

[**اشارہ:** مان لیجیے $\text{HCF}(b, r) = h$ اس لیے $b = k_1 h$ اور $r = k_2 h$ جہاں k_1 اور k_2 ہم مفرد ہیں۔]

6۔ ایک خط مثلث ABC کے ضلع BC کے متوازی ہے جو AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}}$.

A1.5 بیان کا منفی (الٹا)

اس سیکشن میں ہم اس بات پر بحث کریں گے کہ ایک بیان سے انکار سے مراد کیا ہے۔ اس سے پہلے ہم شروع کریں ہم کچھ علامتوں سے آپ کو متعارف کرانا چاہتے ہیں جو ان تصورات کو سمجھنے میں ہماری مدد کریں گے شروع میں آیئے بیان کو ایک واحد اکائی کے طور پر دیکھیے اور اس کو کوئی نام دیجیے مثال کے طور پر ہم بیان، 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں ہوئی بارش، کو p سے ظاہر کرتے ہیں، اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

p: 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش ہوئی

اسی طرح سے آیئے لکھتے ہیں

q: تمام ٹیچر خاتون ہیں

r: مائیک کے کتے کی کالی دم ہے

s: $2 + 2 = 4$

t: مثلث ABC مساوی ضلعی ہے

یہ علامتیں اب بیانات کی خصوصیات پر بحث کرنے میں ہماری مدد کریں گی اور یہ دیکھنے میں بھی کہ ہم کس طرح ان کو ملاتے ہیں۔ شروعات میں ہم سادہ بیانات پر کام کریں گے اس کے بعد ہم پیچیدہ بیانات کو لیں گے۔

آیئے اب مندرجہ ذیل جدول پر غور کیجیے جس میں ہم دیے ہوئے ہر ایک بیان سے ایک نیا بیان بناتے ہیں۔

اصل بیان	نیا بیان
p: 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش ہوئی	$\sim p$: یہ غلط ہے کہ 1 ستمبر کو دہلی میں بارش ہوئی
q: تمام ٹیچرس خاتون ہیں	$\sim q$: یہ غلط ہے کہ تمام ٹیچرس خاتون ہیں
r: مائک کے کتّے کی دم کالی ہے	$\sim r$: یہ غلط ہے کہ مائک کے کتّے کی دم کالی ہے
s: $2+2=4$	$\sim s$: یہ غلط ہے کہ $2 + 2 = 4$
t: مثلث ABC مساوی ضلعی ہے	$\sim t$: یہ غلط ہے کہ مثلث ABC مساوی ضلعی ہے

جدول میں ہر نیا بیان پرانے نظیری بیان کی نفی نیا انکار ہے یعنی نیا انکار ہے $\sim p, \sim q, \sim r, \sim s$ اور $\sim t$ بیانات بالترتیب $p,$ q, r, s اور t کا انکار ہیں یہاں $\sim p$ کو p نہیں پڑھا جانا ہے بیان $\sim p$ کے ذریعے بنائے گئے بیان کی نفی کرتا ہے نوٹ کیجیے ہم اپنی عام بات چیت میں $\sim p$ سے ہماری مراد ہوتی ہے۔ کہ 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش نہیں ہوئی۔ لیکن ایسا کرنے کے لیے ہمیں بہت ہی احتیاط برتنی ہے۔ آپ سوچ سکتے ہیں کہ کوئی کسی بیان کا منفی حاصل کرنے کے لیے صرف دیئے ہوئے بیان میں کسی مناسب جگہ میں نہیں لگا دے لیکن p کے سلسلہ میں یہ ممکن ہے لیکن شکل تب آتی ہے جب بیان تمام سے شروع ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر بیان تمام ٹیچرس خاتون ہیں۔ یہ ایسا ہی بیان ہے جیسے کچھ ٹیچرس ایسے بھی ہیں جو مرد ہیں۔ آیئے اب دیکھتے ہیں کہ کیا ہوگا اگر ہم صرف بیان میں نہیں لگاتے ہیں۔ ہمیں بیان حاصل ہوتا ہے۔ تمام ٹیچرس عورتیں نہیں ہوتیں۔ یا ہم بیان حاصل کر سکتے ہیں تمام ٹیچرس نہیں ہیں عورتیں۔ پہلا بیان لوگوں کو کنفیوز کر سکتا ہے اس کا مطلب ہو سکتا ہے (اگر ہم لفظ

تمام پر زور دیں) کے تمام ٹیچرس عورتیں ہیں؟ یہ q کا نفی نہیں ہے جبکہ دوسرا بیان q کا مفہوم دیتا ہے یعنی کم سے کم ایک ٹیچر ہے جو عورت نہیں ہے، اس لئے کسی بیان کا منفی لکھتے ہیں آپ کو احتیاط سے کام لینا چاہیے اس لئے ہم کسی طرح طے کریں گے کہ ہم کو صحیح نفی بیان حاصل ہوا ہے؟ ہم مندرجہ ذیل طریقہ اپناتے ہیں مان لیجئے p ایک بیان ہے اور $\sim p$ اس کا نفی بیان ہے تب $\sim p$ غلط ہوتا ہے جب بھی p صحیح ہوتا ہے اور $\sim p$ صحیح ہے جب بھی p غلط ہے۔

مثال کے طور پر اگر یہ صحیح ہے کہ مائک کے کتّے کہ دم کالی ہے۔ تب یہ جھوٹ ہے کہ مائک کے کتے کہ دم کالی نہیں ہے۔ اگر یہ جھوٹ ہے کہ مائک کے کتے کی دم کالی ہے تب یہ سچ ہے کہ مائک کے کتّے کی دم کالی نہیں ہے۔ اسی طرح سے بیانات s اور t کے نفی ہیں۔

$s: 2 + 2 = 4$; نفی $\sim s: 2 + 2 \neq 4$

t: مثلث ABC مساوی ضلعی ہے منفی $\sim t$ مثلث ABC مساوی ضلعی نہیں ہے

اب $\sim(\sim s)$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ یہ $2 + 2 = 4$ ہوگا جو s ہے اور $\sim(\sim t)$ کیا ہے؟ یہ ہوگا Δ ABC مساوی ضلعی ہے یعنی t۔ حقیقت میں کسی بھی بیان p کے لئے $\sim(\sim p)$، p ہے۔

مثال 12: مندرجہ ذیل بیانات کی نفی لکھیے۔

(i) مائک کے کتّے کی دم کالی نہیں ہے۔

(ii) تمام غیر ناطق اعداد حقیقی ہوتے ہیں۔

(iii) $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے

(iv) کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد ہیں۔

(v) تمام ٹیچرس مرد نہیں ہیں۔

(vi) کچھ گھوڑے بھورے نہیں ہیں۔

(vii) کوئی ایسا حقیقی عدد x نہیں ہے جس کے لئے $x^2 = -1$

حل:

(i) یہ غلط ہے کہ مائک کے کتّے کی دم کالی نہیں ہے یعنی مائک کے کتّے کی دم کالی ہے۔

(ii) یہ غلط ہے کے تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں یعنی کچھ (کم سے کم ایک) غیر ناطق عدد حقیقی عدد نہیں ہے۔ اس کو

اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد نہیں ہے۔

(iii) یہ غلط ہے کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے یعنی $\sqrt{2}$ ناطق نہیں ہے۔

(iv) یہ غلط ہے کہ کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد ہیں یعنی کوئی بھی ناطق عدد صحیح عدد نہیں ہے۔

(v) یہ غلط ہے کہ تمام ٹیچرس مرد نہیں ہین یعنی تمام ٹیچرس مرد ہیں۔

(vi) یہ غلط ہے کہ کچھ گھوڑے بھورے نہیں ہیں یعنی تمام گھوڑے بھورے ہیں۔

(vii) یہ غلط ہے کہ کوئی ایسا حقیقی عدد x نہیں ہے جس کے لیے $x^2 = -1$ یعنی کم سے کم ایک ایسا حقیقی عدد ہے جس کے لیے $x^2 = -1$

ریمارک: مذکورہ بالا بحث سے آپ کسی بیان کی نفی حاصل کرنے کے لیے مندرجہ ذیل قاعدہ حرکت کے قانون تک پہنچتے ہیں۔

(i) پہلے آپ بیان کو 'نہیں' سے لکھیے۔

(ii) اگر کوئی غلط فہمی ہے تو بیان میں مناسب ردو بدل کیجیے خاص طور سے جن بیانات میں 'تمام' یا 'کچھ' شامل ہے۔

مشق A1.4

1۔ مندرجہ ذیل بیانات کی نفی معلوم کیجیے

(i) آدمی فانی ہے

(ii) خط l، m کے متوازی ہے

(ii) باب میں بہت ساری مشقیں ہیں

(iv) تمام صحیح اعداد ناطق اعداد ہیں۔

(v) کچھ مفرد اعداد طاق ہیں

(vi) کوئی طالب علم کاہل نہیں ہے۔

(ix) 2 مثبت صحیح عدد a کو تقسیم کرتا ہے۔

(x) صحیح اعداد a اور b ہم مفرد ہیں۔

2۔ مندرجہ ذیل سوالات میں دو بیانات ہیں۔ معلوم کیجیے کہ دوسرا بیان پہلے کا منفی ہے یا نہیں۔

(i) ممتاز بھوکا ہے۔
ممتاز بھوکا نہیں ہے

(ii) کچھ بلیاں کالی ہیں
کچھ بلیاں بھوری ہیں

(iii) تمام ہاتھی بڑے ہیں۔
ایک ہاتھی بڑا نہیں

(iv) آگ کے تمام انجن لال ہیں
آگ کے تمام انجن لال نہیں ہے

(v) کوئی بھی آدمی گائے نہیں ہے۔

کچھ آدمی گائے ہیں۔

A1.6 بیان کا معکوس

اب ہم بیان کے معکوس کے سلسلہ میں بحث کریں گے۔ اس کے لئے ہمیں یہ معلوم ہونا چاہئے کہ مرکّب بیان کا تصور کیا ہے یعنی ایسے بیان جو دو یا دو سے زیادہ سادہ بیانوں سے مل کر بنے ہوں۔ بہت سے طریقے ہیں مرکّب بیانات بنانے کے لیکن ہم صرف اپنی توجہ اسی پر مرکوز کریں گے کہ دو سادہ بیانوں اگر اور تو یا تب (پھر) لگا کر مرکب بیان کی تخلیق کی جائے۔ مثال کے طور پر اگر بارش ہو رہی ہے تو سائیکل پر جانا مشکل ہوگا۔ دو بیانوں سے مل کر بنا ہے۔

بارش ہو رہی ہے: p

سائیکل پر جانا اس وقت مشکل ہوگا: q

اپنے پچھلے خیال یا تصور کو استعمال کرنے پر ہم کہہ سکتے ہیں اگر p، تو q ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں p کا مطلب ہے q اور اس کو ہم $p \Rightarrow q$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب فرض کیجئے کہ آپ کے پاس ایک بیان ہے۔ اگر پانی کا ٹینک کالا ہے تو اس میں پینے کا پانی ہے۔ یہ $p \Rightarrow q$ کی شکل کا ہے جہاں مفروضہ p ہے (پانی کا ٹینک کالا ہے) اور نتیجہ q (ٹینک میں پینے کا پانی ہے) اگر ہم مفروضہ اور نتیجہ کو بدل دیں۔ تو ہمیں کیا ملتا ہے؟ ہمیں ملتا ہے $q \Rightarrow p$ یعنی اگر ٹینک میں پینے کا پانی ہے تب ٹینک کالا ہونا چاہیے یہ بیان $p \Rightarrow q$ کا معکوس کہلاتا ہے۔

عمومی طور پر بیان $p \Rightarrow q$ کا معکوس $q \Rightarrow p$ جہاں p اور q بیانات ہیں۔ نوٹ کیجئے کہ $p \Rightarrow q$ اور $q \Rightarrow p$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

مثال 13: مندرجہ ذیل بیانات کے معکوس لکھیے۔

(i) اگر جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے تب 17 اگست کو اتوار کا دن ہوگا۔

(ii) اگر 17 اگست کو اتوار ہے تب جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے۔

(iii) اگر پاؤلین غصہ میں ہے تو اس کا چہرہ سرخ ہو جاتا ہے۔

(iv) اگر کسی شخص کے پاس تعلیم کی ڈگری ہے تو وہ پڑھانے کے لئے اہل ہے۔

(v) اگر کسی شخص کو viral infection ہے تو اس کو بہت تیز بخار ہوگا۔

(vi) اگر احمد ممبئی میں ہے تب وہ انڈیا میں ہے۔

(vii) اگر ABC ایک مساوی ضلعی ہے تو اس کے تمام داخلی زاویہ مساوی ہیں۔

(viii) اگر x ایک ناطق عدد ہے تب x کا عشری پھیلاؤ غیر ختم اور غیر تکراری ہے۔

(ix) اگر $x - a$ کا جزو ضربی ہے تب $P(a) = 0$

حل: مندرجہ بالا ہر بیان $p \Rightarrow q$ کی شکل ہے۔اس لئے اس کا معکوس معلوم کرنے کے لیے پہلے ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ p اور q کیا ہیں اور پھر $q \Rightarrow p$ لکھیں گے۔

(i) 17 اگست کو اتوار کا دن ہے: q جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے: p اس لئے اس کا معکوس ہے اگر 17 اگست کو اتوار ہے تو جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے۔

(ii) یہ (i) کا معکوس ہے۔اس لئے اس کا معکوس بیان اوپر (i) میں دیا ہوا ہے۔

(iii) اگر پاؤلین کا چہرہ سرخ ہوگیا تو وہ غصہ میں ہے۔

(iv) اگر ایک شخص پڑھانے کا اہل ہے۔تو اس کے پاس تعلیم کی ڈگری ضرور ہوگی۔

(v) اگر ایک شخص کو تیز بخار ہے تو اسے viral infection ہے۔

(vi) اگر احمد انڈیا میں ہے تو وہ ممبئی میں ہے۔

(vii) اگر مثلث ABC کے داخل زاویہ مساوی ہیں تو یہ مساوی ضلعی مثلث ہے۔

(viii) اگر x کا عشری پھیلاؤ غیر ختم اور غیر تکراری ہے تب x غیر ناطق ہے۔

(ix) اگر $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزو ضربی ہے تب $p(a)=0$۔

نوٹ کیجئے کہ ہم نے اس بات کی پرواہ کئے بغیر کہ اوپر دئے گئے بیانات صحیح ہیں یا غلط، ہم نے ہر ایک بیان کا معکوس لکھا مثال کے طور پر مندرجہ ذیل بیان پر غور کیجئے۔: اگر احمد ممبئی میں ہے تب یہ انڈیا میں ہے۔ یہ بیان صحیح ہے۔اب اس کا معکوس لکھئے: اگر احمد انڈیا میں ہے تب یہ ممبئی میں ہے یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہے۔کیونکہ وہ ہندوستان کے دوسرے حصہ میں بھی ہوسکتا ہے۔
ریاضی خاص طور سے جیومیٹری میں آپ کا بہت سی ایسی صورت حال سے سامنا ہوگا جہاں $p \Rightarrow q$ صحیح ہے۔اور آپ کو

یہ طے کرنا ہوگا کہ آیا اس کا معکوس یعنی $q \Rightarrow p$ بھی درست ہے۔

مثال 14: مندرجہ ذیل بیانوں کا معکوس معلوم کیجیے پھر سوال میں یہ بھی طے کیجیے کہ آیا معکوس صحیح ہے یا غلط ہے۔

(i) اگر n ایک جفت عدد ہے، تب $2n + 1$ ایک طاق عدد ہے۔

(ii) اگر کسی حقیقی عدد کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے تب عدد ناطق ہے۔

(iii) اگر قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تب نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑا برابر ہے۔

(iv) اگر چار ضلعی کے مقابل ضلعوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہے تب چار ضلعی متوازی الاضلاع ہے۔

(v) اگر دو مثلث متماثل ہیں تب انکے نظیری زاویہ برابر ہیں۔

حل:

(i) معکوس ہے، اگر $2n + 1$ طاق صحیح عدد ہے تب n ایک جفت عدد ہے: یہ ایک غلط بیان ہے (مثال کے طور پر $15 = 2(7) + 1$ اور 7 طاق ہے۔

(ii) اگر ایک حقیقی عدد ناطق ہے تب اس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے، اس کا معکوس بیان ہے۔ یہ ایک غلط بیان ہے کیونکہ غلط بیان ہے کیونکہ ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوسکتا ہے۔

(iii) معکوس ہے اگر ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہو تب خطوط متوازی ہوں گے۔ نویں کلاس کی نصابی کتاب کے بدیہہ 6.4 سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ بیان درست ہے۔

(iv) اگر چار ضلعی متوازی الاضلاع ہے تب اس کے مخالف اضلاع کا ہر ایک جوڑا مساوی ہے، معکوس ہے: یہ صحیح ہے (نویں کلاس کا مسئلہ 8.1)

(v) اگر دو مثلثوں کے نظیری زاویہ برابر ہیں تب یہ متماثل ہیں؛ معکوس ہے۔ یہ بیان غلط ہے، آپ اس کی ایک مناسب بر عکس مثال معلوم کیجیے۔

مشق A1.5

1۔ مندرجہ ذیل بیانات کے معکوس معلوم کیجیے۔

(i) اگر ٹوکیو میں گرمی ہے تو شرن کو بہت پسینہ آئے گا۔

(ii) اگر شالینی بھوکی ہے تب اس کے پیٹ میں چوہے کود رہے ہیں۔

(iii) اگر جسونت کے پاس اسکالرشپ ہے تب اس کو ڈگری مل جائے گی۔

(iv) اگر پودے میں پھول ہیں تو یہ زندہ ہے۔

(v) اگر جانور بلی ہے تو اس کے دم بھی ہوگی۔

2۔ مندرجہ ذیل بیانات کے معکوس لکھئے۔ ہر ایک سوال میں یہ طے کیجئے کہ آیا ان کے معکوس صحیح ہیں یا غلط

(i) اگر مثلث ABC مساوی الساقین ہے تب اس کے قاعدہ کے زاویہ مساوی ہیں۔

(ii) اگر ایک صحیح عدد طاق ہے تب اس کا مربع طاق صحیح عدد ہے۔

(iii) اگر $x^2 = 1$ تب $x = 1$

(iv) اگر ABCD ایک متوازی الاضلاع تب AC اور BD ایک دوسرے کی تنصیف کریں گے۔

(v) اگر a، b اور c مکمل اعداد ہیں تب $a+(b+c)=(a+b)+c$

(vi) اگر x اور y طاق اعداد ہیں تب $(x+y)$ ایک جفت عدد ہے۔

(vii) اگر متوازی الاضلاع کے راس دائرہ پر واقع ہیں تب یہ ایک مستطیل ہے۔

A1.7 تضاد کے ذریعے ثبوت

ابھی تک ایسی تمام مثالوں کو ہم نے نتائج کی سچائی کو قائم کرنے کے لئے سیدھے دلائل استعمال کئے اب ہم غیر درست طریقے سے یا خاص طور پر دلائل سے کسی سچائی کو ثابت کریں گے، یہ طریقہ ریاضی میں ایک زبردست اور زار مانا جاتا ہے جسے ہم تضاد کے ذریعے ثبوت کے طور پر جانتے ہیں۔ اس کا استعمال ہم پہلے ہی باب 1 میں بہت سے اعداد کی غیر ناطقیت کو ثابت کرنے کے لئے کر چکے ہیں۔ اور اسی طرح دوسرے بابوں میں کچھ مسئلوں کو ثابت کرنے میں اس کا استعمال کیا ہے۔ یہاں ہم اس تصور کو مزید واضح کرنے کے لئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم آگے بڑھیں آیئے تشریح کرتے ہیں کہ تضاد کیا ہے۔ ریاضی میں تضاد واقع ہوتا ہے جب ہمارے پاس ایک ایسا بیان ہوتا ہے p جس کے p صحیح ہے اور $\sim p$ اس کا نفی بھی صحیح ہے۔ مثال کے طور پر

$$p: \; x = \frac{a}{b}$$ جہاں a اور b ہم مفرد ہیں

2، a اور b دونوں کو تقسیم کرتا ہے: q

اگر ہم یہ فرض کریں کہ p صحیح ہے اور ہم دلائل سے آگے چل کر یہ بھی دکھا دیں کہ q بھی صحیح ہے تب ہم ایک تضاد تک پہنچتے ہیں۔ کیونکہ q کا مطلب ہے کہ p کا نفی صحیح ہے۔ اگر آپ کو یاد ہو تو $\sqrt{2}$ غیر ناطق ثابت کرنے کے لئے ہم نے بالکل ایسا ہی کیا تھا (باب 1 دیکھیے)

تضاد کا ثبوت کس طرح سے کام کرتا ہے؟ آیئے اس کو ایک مخصوص مثال لے کر سمجھتے ہیں۔

فرض کیجئے، ہمیں دیا ہوا ہے۔

تمام عورتیں فانی ہیں۔ A ایک عورت ہے، ثابت کیجئے کہ A فانی ہے۔

حالانکہ یہ ایک کافی آسان مثال ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم تضاد کے ذریعے کس طرح اسے ثابت کرتے ہیں۔

- آیئے فرض کرتے ہیں کہ ہمیں بیان p (یہاں ہمیں دکھانا ہے A کہ A فانی ہے: p)
- اس لئے ہم یہ مانتے ہوئے شروع کرتے ہیں کہ بیان صحیح نہیں ہے یعنی ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ p منفی درست ہے (یعنی A فانی نہیں ہے)
- پھر ہم p کی نفی کی سچائی پر منحصر منطقی استخراج کا ایک سلسلہ معلوم ہوتا ہے (کیونکہ A فانی نہیں ہے اس بیان کی ایک برعکس مثال ہے۔ تمام عورتیں فانی ہیں۔ اس طرح سے یہ غلط ہے کہ تمام عورتیں فانی ہیں) اس سے ہم تضاد تک پہونچتے ہیں۔ اور یہ تضاد ہمیں اس لئے ملتا ہے کہ ہم نے فرض غلط کیا تھا کہ p صحیح نہیں ہے، (ہمارے پاس ایک تضاد ہے: کیونکہ ہم دکھا چکے ہیں کہ بیان: تمام عورتیں فانی ہیں اور اس نفی تمام عورتیں فانی نہیں ہیں، ایک وقت میں صحیح ہے۔ اس سے تضاد پیدا ہوتا ہے کیونکہ ہم نے یہ فرض کیا تھا کہ A فانی نہیں ہے
- اس لیے ہم نے جو فرض کیا تھا وہ غلط تھا یعنی p کو صحیح ہونا چاہئے (اس لئے A فانی ہے) آیئے اب ریاضی کی کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 15: ایک غیر صفر ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب غیر ناطق ہے۔

حل:

بیانات	تجزیہ
ہم تضاد کا ثبوت استعمال کریں گے۔ مان لیجیے r ایک غیر صفر ناطق عدد ہے اور x ایک غیر ناطق ہے۔ مان لیجئے $r = \frac{m}{n}$ جہاں m اور n صحیح اعداد ہیں اور $n \neq 0$، $m \neq 0$، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ rx غیر ناطق ہے	
فرض کیجئے rx ناطق ہے	یہاں ہم اس بیان کا نفی فرض کر رہے ہیں جس کو ہمیں ثابت کرنا ہے
تب $rx = \frac{p}{q}$، $q \neq 0$ اور p اور q صحیح اعداد ہیں	یہ پچھلے بیان سے معلوم ہوتا ہے اور ناطق عدد کی تعریف سے بھی
مساوات $rx = \frac{p}{q}$ کو دوبارہ ترتیب دینے پر اور حقیقت $r = \frac{m}{n}$ کو استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ کیونکہ np اور mq صحیح اعداد ہیں اور $mq \neq 0$، x ایک ناطق عدد ہے	صحیح اعداد کی خصوصیات کو استعمال کرنے اور ناطق عدد کی تعریف کو استعمال کرنے سے
یہ ایک تضاد ہے۔ کیونکہ ہم دکھا چکے ہیں کہ x ناطق ہے۔ لیکن ہمارے مفروضہ ہے کہ x غیر ناطق ہے	ہم یہی دیکھنا چاہتے ہیں یعنی تضاد
یہ تضاد اس لئے آیا ہے کیونکہ ہم نے فرض غلط کیا تھا کہ rx ناطق ہے اس لئے rx غیر ناطق ہے	منطقی استخراج

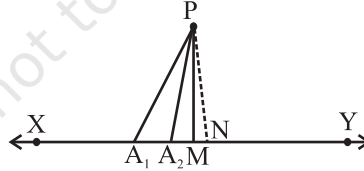
اب ہم مثال 11 کو اس مرتبہ تضاد کے طریقہ سے ثابت کریں گے۔

بیانات	تجزیہ
مان لیجئے کہ بیان درست نہیں ہے	جیسے کہ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں یہ کسی بحث کا شروعاتی نقطہ ہے جب ہم تضاد کے ذریعے ثابت کرتے ہیں

اس لئے ہم فرض کرتے ہیں ایک ایسا مفرد عدد موجود ہے $p>3$ جو $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا نہیں ہے جہاں n ایک مکمل عدد ہے	یہ نتیجہ کے بیان کا نفی ہے
6 سے تقسیم کے اقلیدس کے معاونہ کا استعمال کر کے اور اس حقیقت کا استعمال کر کے، p، $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا نہیں ہے جس سے ملتا ہے $p=6n$ یا $6n+2$ یا $6n+3$ یا $6n+4$	پہلے سے ثابت کئے گئے نتیجوں کو استعمال کرنے پر
اس لئے p، یا تو 2 سے یا 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے	منطقی استخراج
اس لئے p مفرد نہیں ہے	منطقی استخراج
یہ ایک تضاد ہے کیونکہ ہمارا مفروضہ p مفرد ہے	مختصراً یہی ہم چاہتے ہیں
یہ تضاد اس لئے آیا ہے کیونکہ ہم نے فرض کیا تھا کہ ایک ایسا مفرد $p>3$ ہے جو $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا نہیں ہے	
اس طرح سے 3 سے بڑا ہر مفرد عدد $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا ہے۔	ہم نتیجہ تک پہونچ گئے

ریمارک: اوپر دی گئی ثبوت کی مثال سے یہ پتہ چلتا ہے کہ ایک ثبوت کو ثابت کرنے کے بہت سے طریقہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ A1.2: کسی نقطہ سے کسی خط پر کھینچے گئے تمام قطعات خط میں سب سے چھوٹا خط اس خط پر کھینچا گیا عمود ہے۔

ثبوت:

شکل A1.5

بیانات	تجزیہ
مان لیجیے XY دیا ہوا دیا ہوا خط ہے اور P ایک نقطہ جو XY پر نہیں ہے اور PM, PA_1, PA_2 ..... وغیرہ نقطہ P سے خط XY پر کھینچے گئے قطعات خط ہیں جن میں PM سب سے چھوٹا ہے (شکل A1.5 دیکھیے)	کیونکہ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ تمام، PM, PA_1, PA_2 .... وغیرہ میں سے سب چھوٹا XY پر عمود ہے۔ ہم ان قطعات خط کو لے کر شروع کرتے ہیں

مان لیجئے XY ، PM پر عمود نہیں ہے	اس بیان کا نفی ہے جس کو ہمیں تضاد کے ذریعے ثابت کرنا ہے
خط XY پر عمود PN ڈالئے شکل A1.5 میں نقطہ دار سے دکھایا گیا ہے۔	ہم اکثر نتیجوں کو ثابت کرنے کے لئے تشکیل کی ضرورت ہوتی ہے
تمام قطعات خط PM, PA_1, PA_2 .... وغیرہ ہیں PN سب سے چھوٹا ہے، جس کا مطلب ہے PN > PM	ایک قائم مثلث ضلع اس کے وتر سے چھوٹا ہوتا ہے اور اعداد کی جانی پہچانی خصوصیات کی رو سے
یہ ہمارے مفروضہ کہ PM، تمام قطعات خط میں سے سے چھوٹا کا تضاد ہے	یہی ہم چاہتے ہیں
اس لئے، قطع خط PM، XY پر عمود ہے	ہم نتیجہ تک پہونچ گئے

مشق A1.6

1۔ فرض کیجیے $a + b = c + d$ اور $a < c$ تضاد کے ثبوت کا استعمال کرکے دکھایئے کہ $b > d$

2۔ مان لیجیے r ایک ناطق عدد ہے اور x ایک غیر ناطق عدد، تضاد کے ثبوت سے دکھایئے کہ $x + r$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

3۔ تضاد کے ثبوت کا استعمال کرتے ہوئے دکھایئے کہ اگر ایک صحیح عدد a کے لئے a^2 جفت ہے تو a بھی جفت ہے۔

[اشارہ: مان لیجیے کہ a جفت نہیں ہے یعنی یہ $2n + 1$ کی شکل کا ہوگا کسی صحیح عدد n کے لئے اور پھر آگے بڑھیے]

4۔ تضاد کے ثبوت سے ثابت کیجیے کہ ایک صحیح عدد a کے لئے a^2 جو 3 سے تقسیم ہوتا ہے۔ تب a بھی 3 سے تقسیم ہوگا۔

5۔ تضاد کے ثبوت کو استعمال کرتے ہوئے دکھایئے کہ n کی کوئی ایسی قدر نہیں ہے جس کے لئے 6^n ہندسہ صفر پر ختم ہو۔

6۔ تضاد کے طریقہ سے ثابت کیجیے کہ ایک مستوی میں دو مختلف خطوط ایک نقطہ سے زیادہ نقطہ پر قطع نہیں کر سکتے۔

A1.8 خلاصہ

اس ضمیمہ میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1۔ ثبوت کے مختلف اجزائے ترکیبی اور نویں کلاس میں سیکھے گئے متعلقہ تصورات

2۔ بیان کا نفی (انکار)

3۔ بیان کا معکوس

4۔ تضاد کے ذریعے ثبوت۔